ACTES DE LA VI TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2002), 171-180

LA MATEMÀTICA COM A EINA ESSENCIAL PER A HEAVISIDE

Eduard Recasens Gallart
Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya.

Paraules clau: *Heaviside, càlcul operacional, matemàtica experimental, matemàtica pura*.

Mathematics as an essential tool for Heaviside

Summary: *Heaviside introduces his operational calculus to enable him to solve ordinary differential equations which come out of the theory of electrical circuits. For Heaviside Mathematics is a great tool for discovery in Physics, he considers Mathematics as an experimental science.*

Key words: *Heaviside, operational calculus, experimental mathematics, pure mathematics.*

Oliver Heaviside (Londres, 1850-Paington, 1925) procedeix d'una família amb pocs recursos econòmics. Va a l'escola fins als 16 anys i no segueix estudis superiors. Una germana de la mare de Heaviside es casa amb el professor Ch. Wheatstone, del King's College de Londres. Sota la influència de Wheatstone, Heaviside, amb 18 anys, entra a treballar com a operador telegrafista a la Companyia de Telègrafs anglodanesa, a una oficina situada a Newcastle. Li agrada la feina i té un bon sou; no obstant això, als 24 anys la deixa. A Heaviside l'atrau enormement el món de l'electricitat i el magnetisme i vol llegir tot allò que tracti sobre aquest tema, però necessita temps, sobretot després de la gran troballa: el recent publicat *Tractat sobre electricitat i magnetisme* (1873), de J. C. Maxwell. El text que segueix són paraules seves, que va escriure en una carta datada el 1918:

> Recordo de quan jo era jove la meva primera trobada amb el gran *Tractat* del Maxwell. Fins llavors no s'havia escrit una teoria lligada i completa, sinó que només es trobaven coses disperses; jo m'esforçava per entendre l'electricitat enmig d'una gran foscor. Quan vaig veure a la taula de la llibreria el treball que Maxwell havia publicat feia poc, em vaig posar a fullejar-lo i vaig quedar sorprès. Vaig llegir-ne el prefaci i l'últim capítol, i alguns trossos més d'aquí i d'allà; sentia que era una cosa gran, i amb moltes possibilitats d'obrir noves perspectives. Vaig decidir que l'estudiaria i, tot seguit m'hi vaig posar. Jo era molt ignorant. No tenia cap coneixement d'anàlisi matemàtica i a l'escola només havia après àlgebra bàsica i trigonometria, disciplines que ja havia oblidat, cosa que em deixava fora de combat. Després d'alguns anys vaig arribar a entendre d'aquell llibre tot allò que, amb la formació que tenia, jo era capaç d'en-

> tendre. A partir d'aquí vaig decidir deixar el llibre de Maxwell i seguir el meu propi curs, i aleshores va ser quan vaig començar a progressar amb molta més rapidesa.

En aquest fragment cal destacar dues coses:

1. La decisió de Heaviside d'investigar per ell mateix sobre l'electricitat i el magnetisme. Tota la seva vida serà un autodidacte.
2. Heaviside s'adona que els seus coneixements matemàtics són pràcticament nuls per a la tasca que pensa emprendre.

Per a Heaviside la matemàtica serà una eina essencial per a poder entendre l'obra de Maxwell i per a les seves investigacions electromagnètiques. Quan no trobi en els llibres allò que necessita, ell mateix ho crearà, ja sigui amb rigor o sense: això per a ell no compta. L'important és que aquell nou símbol, aquell nou mètode, funcioni, i això vol dir que els resultats que n'obtingui matemàticament concordin amb l'experiència. Ell mateix ens diu que la seva matemàtica és una matemàtica experimental. A Heaviside no l'ajuda en les seves investigacions una matemàtica abstracta sense significació immediata en el camp de l'electromagnetisme. Per a ell, els símbols han de representar càrregues elèctriques, corrents elèctrics, impedàncies, capacitàncies, etc., i quan ell defineix un nou concepte, aquest ha de tenir les propietats que es volen observar del fenomen que representa. Per exemple, Heaviside necessita expressar que a partir d'un cert moment hi ha una certa càrrega Q, però que abans d'aquest moment aquesta càrrega no hi era. Per a això introdueix el símbol **1**, que no és el número 1, sinó una funció temporal que per $t < 0$ val 0 i que per $t > 0$ val 1. Llavors, el producte $\mathbf{1}\cdot Q$ representarà la càrrega del circuit a partir de $t > 0$ (aquest **1** s'anomena avui *funció de Heaviside*, i es representa per la lletra H).

Quan necessita calcular la taxa de variació de Q en l'instant inicial, necessita donar un significat a la taxa de variació d' **1**, i això el porta, després d'un raonament físic, a dir-nos (en les seves paraules): «p**1** means a function of t which is wholly concentrated at the moment t = 0, of total amount 1. It is an impulsive function, so to speak» (Heaviside, 1971, vol. II, p. 55) (p significa per a Heaviside la derivada respecte del temps).[1]

La tasca matemàtica de Heaviside es troba principalment reunida en dues obres —*Electrical Papers* (1892) i *Electromagnetic Theory*, vol. I (Londres, 1893), vol. II (Londres, 1899), vol. III (Londres, 1912)— les quals recullen la majoria dels seus articles.

Quan Heaviside ha de resoldre l'equació diferencial

$$L\frac{dc}{dt} + Rc = E \tag{1}$$

1. L'any 1926, P. Dirac, en la seva formulació de la mecànica quàntica, introduirà la funció δ(t) definida per les següents condicions matemàticament impossibles:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad t = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

amb la propietat que per a qualsevol funció contínua φ(t) es compleix que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

corresponent a un circuit que conté una resistència R, una impedància L en sèrie i que a partir d'un cert moment actua una fem E (constant),[2] ell voldria poder treballar l'equació (1) algebraicament (així ho pot fer quan només hi ha R, llei d'Ohm: Rc = E), el problema és com treballar algebraicament amb la derivada. L'artifici que utilitza és anomenar p al fet de derivar respecte el temps i transformar l'equació diferencial (1) en l'equació algebraica

$$\mathrm{Lpc} + \mathrm{Rc} = \mathrm{E}$$

on p juga el paper d'un coeficient algebraic. D'aquesta manera l'equació diferencial (1) es transforma simbòlicament amb l'equació algebraica

$$(\mathrm{Lp} + \mathrm{R})\mathrm{c} = \mathrm{E} \tag{2}$$

d'aspecte equivalent a la llei d'Ohm. Per Heaviside l'expressió simbòlica Lp + R és anomenada *operador de resistència*.[3] De (2) resulta l'expressió operacional del corrent c

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Lp+R}}$$

i ara el problema matemàtic és el de calcular l'expressió temporal del corrent c.

Heaviside continua pensant en termes algebraics (però ara d'àlgebra infinita), com que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ (3), escriurà

$$\frac{1}{\mathrm{Lp+R}} = \frac{1}{\mathrm{Lp}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Lp}}} = \frac{1}{\mathrm{Lp}}\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Lp}} + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{L}^2\mathrm{p}^2} - \frac{\mathrm{R3}}{\mathrm{L}^3\mathrm{p}^3} + \ldots\right) \qquad (4)^4$$

Aquest desenvolupament en potències decreixents fa que Heaviside hagi de donar un significat als operadors $\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}$.

(Per Heaviside la E de (1) és **1**·E, tot i que Heaviside no ho sol escriure explícitament). Llavors defineix

$$\frac{1}{p}1 = \int_0^t 1dt = t, \quad \frac{1}{p^2}t = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}t\right) = \int_0^t tdt = \frac{t^2}{2}, \text{ etc.}$$

I d'aquesta manera calcula c(t):

2. c(t) indica per a Heaviside el corrent elèctric. Avui s'anomena intensitat i(t).

3. Aquesta idea de Heaviside de definir «resistències generalitzades» per tal d'aconseguir expressions algebraicament equivalents a la llei d'Ohm és clarament una idea que trasllueix la seva mentalitat matemàtica.

4. A Heaviside no el preocupa el fet que l'expressió (3) sigui una sèrie numèrica amb convergència per $|x| < 1$ ni el sentit que pugui tenir la sèrie simbòlica (4).

$$\frac{1}{Lp+R}1=\frac{1}{Lp}\left(1-\frac{R}{L}t+\frac{R^2}{L^2}\frac{t^2}{2}-\frac{R^3}{L^3}\frac{t^3}{3!}+\ldots\right)=\frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}t}dt=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$c(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Heaviside mira què passa quan el desenvolupament (4) és en potències creixents de p

$$\frac{1}{Lp+R}=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{1+\frac{Lp}{R}}=\frac{1}{R}\left(1-\frac{Lp}{R}+\frac{L^2p^2}{R^2}-\frac{L^3p^3}{R^3}+\ldots\right)$$

llavors resulta

$$c(t)=\frac{E}{R}$$

D'aquí treu, com a conseqüència, que el desenvolupament en potències creixents dóna la solució temporal per $t\to\infty$.

Aquesta manera de treballar de Heaviside exaspera els matemàtics més puristes de Cambridge, els quals li neguen la publicació de la tercera part de la seva teoria d'operadors simbòlics als *Proceedings* de la Royal Society. W. Burnside, que n'era el «referee», va escriure que els resultats de Heaviside podien ser certs o no ser-ho, però que el camí seguit per obtenir-los feia que no tinguessin cap valor.

Heaviside se sent decebut per aquest rebuig oficial i, al llarg de la seva vida, criticarà durament el purisme de Cambridge. Per exemple, el 1894 escriu:

> I suppose all workers in mathematical physics have noticed how the mathematics seems made for the physics, the latter suggesting the former... This is really the case with resistance operators. It is a fact that their use frequently effects great simplifications and the avoidance of complicated evaluations of definite integrals. But then the rigorous logic of the matter is not plain! Well, what of that? Shall I refuse my dinner because I do not fully understand the process of digestion? No, not if I am satisfied with the result. (Heaviside, 1971, vol. II, p. 9)

Els tres volums d'EMT estan plens de substanciosos comentaris de Heaviside sobre la matemàtica pura i la matemàtica aplicada (i també sobre l'ensenyament de la matemàtica), tots ells plens d'una mordaç ironia. A la introducció a l'EMT I hi ha deu pàgines sota el títol *On the nature of Anti-Mathematicians and of Mathematical Methods of Enquiry*. Aquí ironitza sobre tots aquells que neguen la utilitat de la matemàtica com a eina per al descobriment. Heaviside diu que aquests solen dir que en comptes de perdre el temps fent matemàtiques valdria més construir dinamos més potents, i Heaviside replica que qui no té talent per a les matemàtiques ja fa bé en dedicar el seu temps a fer coses més útils com ara construir dinamos més potents. I més endavant diu que Newton i tots els seus seguidors es van ajudar de les matemàtiques en els seus descobriments, però afegeix: «Jo no puc dir res dels matemàtics purs».

Altres paràgrafs d'EMT II porten els següents títols:

Mathematics is an Experimental Science
Rigorous Mathematics is narrow, Physical Mathematics bold and broad
Physical Problems lead to improved Mathematical Methods
«Mathematics-and Mathematics». Remarkable phenomenon

Essencialment, el mètode operacional de Heaviside consisteix a reduir les equacions diferencials a una expressió simbòlica del tipus

$$Z(p)\, c(t) = E(t)$$

Una mena de llei d'Ohm generalitzada on Z(p) és funció de p i p representa la derivació respecte de t (i a vegades la derivació parcial respecte de t, o bé la derivació respecte d'una altra variable). Z(p) és anomenat *operador de resistència* i el problema és sempre el de calcular $\left[Z(p)\right]^{-1}$ i així poder aïllar c(t), de manera que

$$c(t) = \left[Z(p)\right]^{-1} E(t)$$

i per fer-ho utilitza els desenvolupaments en sèrie de potències del símbol p (convergents o divergents).

En el cas concret en que $\left[Z(p)\right]^{-1}$ és una funció racional de p, Heaviside troba una fórmula que permet resoldre els sistemes d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants sense haver de calcular cap integral: és el que ell anomena *Fórmula d'Expansió*, i que diu el següent:

Si $c = \frac{N(p)}{D(p)} E$, on N(p) i D(p) són polinomis en p, tals que el grau de N(p) és menor que el grau de D(p), $D(p) = (p - \lambda_1) \cdot \ldots (p - \lambda_r)$ i cap arrel λ_i és nul·la, llavors

$$c(t) = \left[\frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{i-1}^{r} \frac{N(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} \right] E^{5}$$

Extrapolant aquest resultat, Heaviside l'aplica amb èxit a altres tipus d'equacions, com és el cas de l'equació de conducció de la calor

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RS \frac{\partial V}{\partial t} \qquad V(0,t) = E, \qquad V(1,t) = 0$$

on, escrivint $\frac{\partial}{\partial t} = p,\ q^2 = RSp,\ s^2 = -q^2$ i després d'una sèrie de càlculs, obté l'equació operacional en s simbòlica:

5. D' indica la derivada respecte de p i la *fórmula d'expansió* de Heaviside és vàlida si c(0) = 0. A *Electrical Papers* hi ha dues demostracions d'aquest resultat; la primera, que és la que el va portar al descobriment de la fórmula, és de caràcter físic, i la segona té un caràcter algebraic: utilitza la descomposició en fraccions simples i aplica desenvolupaments en sèrie (veure Lützen).

$$V = \frac{\sin\left[s(1-x)\right]}{\sin sl} E$$

però ara Z(s) ja no és una funció racional, sinó transcendent, amb infinits zeros al denominador.

En la resolució de problemes relacionats amb la generació d'una ona de difusió (telegrafia, telefonia) es troba amb desenvolupaments en sèrie en els quals les potències de p són fraccionàries (Heaviside, 1971, vol. II, p. 286). Llavors la qüestió és saber què significa $p^{1/2}\,\mathbf{1}$.

Heaviside no dóna cap definició conceptual de derivada fraccional, sinó que li atribueix un valor a partir de la comparació de dues resolucions d'un mateix problema físic (difusió de la calor en una barra). En un cas aplica el mètode de Fourier i en l'altre els seus desenvolupaments simbòlics, i així arriba a les dues formulacions següents:

$$C_0 = \left(\frac{Sp}{R}\right)^{1/2} V_0 \qquad \text{i} \qquad C_0 = \left(\frac{S}{R\pi t}\right)^{1/2} V_0$$

conclou que a fi que coincideixin cal definir l'acció de l'operador simbòlic $p^{1/2}$ sobre **1** mitjançant la igualtat

$$p^{1/2}\,\mathbf{1} = (\pi t)^{-1/2} \qquad \text{(Heaviside, 1971, vol. II, p. 35)}^{6}$$

El punt que més va irritar els matemàtics de Cambridge va ser l'ús indiscriminat que Heaviside feia de les sèries divergents. Durant el segle XVIII els matemàtics havien utilitzat sèries divergents per a calcular valors aproximats de les funcions, però, durant la primera meitat del segle XIX, el rigor encetat per Bolzano, Cauchy i Weierstrass va proscriure'n el seu ús, ja que no hi havia una teoria formalitzada d'aquestes. Heaviside escriu al respecte: «Haig de dir unes poques paraules sobre la diferenciació generalitzada i les sèries divergents... No és fàcil despertar cap entusiasme una vegada que els 'puristes' han refredat tot aquest assumpte... En el futur hi haurà d'haver una teoria que inclogui les sèries convergents i divergents en un tot harmoniós.» (Cooper, 1952, vol. 36, p. 5-19).[7]

Els operadors simbòlics són per a Heaviside una eina essencial per al descobriment, i n'aprèn el seu ús i les seves propietats a mesura que va resolent problemes de tecnologia elèctrica. Aquestes tècniques de resolució d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants per via de la substitució $D = \frac{d}{dt}$ havien estat investigades i utilitzades, entre d'al-

6. A la pàgina 287 d'EMT II, torna a deduir el valor de $p^{1/2}$ a partir de l'extensió d'Euler del factorial (– 1/2)! mitjançant la funció Gamma:

$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Com que $\frac{d^m}{dt^m} t^n = \frac{n!}{(n-m)!} t^{n-m}$ (per n > m, m i n naturals) Heaviside extrapola i aplica aquesta igualtat a m = 1/2 i n = 0, llavors $\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} t^0 = \frac{0!}{\left(-\frac{1}{2}\right)!} t^{-1/2}$, d'on conclou que $p^{1/2}\,\mathbf{1} = (\pi t)^{-1/2}$.

7. A finals del segle XIX Poincaré diu de les sèries asimptòtiques que són aquelles que, sent divergents, donen aproximacions útils en el càlcul de funcions.

tres, per Cauchy (1827), i, més tard, a Anglaterra, en el període comprès entre 1830 i 1860, per Gregory i Boole.[8] El fet és, però, que es va anar perdent l'interès per estudiar aquests operadors simbòlics ja que no es trobava una teoria que en rigorités el seu ús. Va ser precisament degut als èxits obtinguts per Heaviside en aplicar-los a la resolució de problemes relacionats amb circuits elèctrics i de transmissió de senyals que, a partir de la segona dècada del segle XX, es renovés l'interès per part dels matemàtics i dels enginyers per cercar «quelcom» que permetés «legalitzar-los» matemàticament. En aquesta línia d'investigació hi treballà el matemàtic anglès T. J. Bromwich, el qual, utilitzant tècniques d'integració en el camp complex, acabà trobant els resultats que Heaviside havia descobert experimentalment. (Bromwich, 1916, vol. 15, p. 401-448). L'any 1919, Bromwich escriu una carta a Heaviside on li diu que considera la seva manera (referint-se a Heaviside) de treballar amb els operadors com la més útil per a l'enginyer, i que la introducció de les integrals de contorn servirien per convèncer els més puristes dels matemàtics que el p-mètode té un fonament matemàtic sòlid. Heaviside, des de Paington li contesta que s'alegra que, per fi, algú que és matemàtic s'adoni de la importància del càlcul operacional, però li aconsella que no es preocupi més de convèncer els «caps de fusta» dels rigoristes, i afegeix que, com diu Lord Rayleigh, «la lògica és l'última cosa de què hom s'ha de preocupar».

A partir de 1920 comencen a aparèixer una gran quantitat d'articles escrits per enginyers, físics i matemàtics sobre càlcul operacional. El llibre de J. R. Carson *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus* (1926) tingué una gran difusió. En el mètode de Carson la solució h(t) d'una certa equació diferencial s'obtenia com a solució de l'equació integral

$$f(p) = p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt \tag{5}$$

i pel mètode de Bromwich

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(p)}{p}e^{pt}dp \tag{6}$$

El 1927 H. W. March (March, 1927, vol. 33, p. 311-318) s'adona que la h(t) de la fórmula (6) de Bromwich és solució de l'equació integral (5) de Carson. O sigui que (5) i (6) són inverses una de l'altra.

Van der Pool, enginyer de la Philips Gloeilampenfabrikken d'Holanda fou el primer que utilitzà el llenguatge de transformades per donar una versió matemàtica de la teoria d'operadors de Heaviside (mirant la igualtat (5) es diu de f(p) que és la transformada Carson de h(t)) (Pol, 1929, vol. 7, p. 1153-1162): donada l'equació diferencial en t es transforma mitjançant (5) en una equació algebraica en p, la qual, una vegada resolta, s'ha de buscar quina és la seva antitransformada. Van der Pool va elaborar taules on figuraven diverses funcions i les seves tranformades Carson que van ser de gran utilitat per a l'enginyeria.

Cal dir que el mètode de transformades integrals per resoldre equacions diferencials i equacions integrals havia estat aplicat pel matemàtic alemany G. Doetsch, sense tenir per motivació la rigorització del càlcul operacional de Heaviside. El 1937 escriu l'obra *Theorie*

8. Heaviside cita el llibre de Boole: *Treatise on differential equations*, Cambridge, 1859.

und Anwendung der Laplace-Transformation, en la que figura la fórmula de transformació integral

$$f(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt$$

fórmula que Laplace ja havia utilitzat anteriorment.[9]

A partir del 1925 una part significativa de les publicacions matemàtiques estaven dedicades a l'elaboració de teories sobre càlcul operacional. La tècnica essencial era la d'utilitzar transformacions integrals (Carson, Laplace, Mellin, Fourier...), però n'hi hagué d'altres que seguiren un camí de tendència marcadament algebraica: Teoria de Paul Lévy (1926), Teoria de Mikusinski (1950). Destaca la Teoria de Distribucions creada el 1945 per L. Schwartz, on hi trobem una definició rigorosa de la δ de Dirac.

El meu dubte és si totes aquestes teories rigoroses del càlcul operacional construïdes des de la matemàtica pura (Lévy, Mikusinski, Schwartz...), haurien servit a Heaviside per resoldre aquella gran quantitat de qüestions sobre circuits elèctrics i difusió de senyals que es poden trobar en els seus llibres, ja que les conceptualitzacions elaborades des de la matemàtica pura solen ser d'una abstracció tal que poden fer perdre de vista a l'enginyer les entitats de què tracta. La matemàtica pura està formada per sistemes teòrics d'una gran perfecció i, sense cap mena de dubte, són part essencial del coneixement humà; però si haig de pensar la matemàtica com a eina de treball per al científic o l'enginyer, penso més en la manera de fer de Heaviside, Fourier, Euler, Newton, Huygens, Wallis, Stevin, Cardano, Leonardo da Vinci, Regiomontano, Oresme...

En aquesta comunicació no he fet esment de tota una altra part de la matemàtica de Heaviside: la del càlcul vectorial per ell construït amb la intenció de fer més còmode la lectura del llibre de Maxwell, que tant valorava. En aquest tema Heaviside tornarà a entrar en conflicte amb els matemàtics, si bé aquest cop, però, no serà pas per falta de rigor, sinó per ser un «destructor» de la unitat quaterniònica, cosa que ferirà profundament la sensibilitat del matemàtic G. Tait.

Els quaternions creats per Hamilton (1843) són expressions del tipus a + bi + dj + dk on a, b, c i d són nombres reals i i, j i k són unes entitats imaginàries amb una regla de producte convenient

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

per tal que el conjunt resulti un cos de nombres (un cos no commutatiu).

L'àlgebra de quaternions avui no pot sorprendre a cap estudiant de física o de matemàtiques que hagi fet un curs d'àlgebra abstracta, però al segle XIX VA representar una autèntica revolució. Es tractava d'uns nombres amb representació quadridimensional, a més d'un producte no commutatiu. D'altra banda, els dos textos de Hamilton sobre quaternions eren de difícil lectura (amb reflexions metafísiques i comentaris lingüístics inclosos). G. Tait, company professional de Hamilton, fou el gran defensor i divulgador d'aquesta teoria de quaternions, i fou precisament amb Tait amb qui Heaviside s'enfrontà. Sota el punt de vista de la

9. G. Doetsch criticà durament la manera de fer de Heaviside i arribà a dir que el fet que Heaviside obtingués resultats correctes no era més que una casualitat. (vegis LÜTZEN, p. 186).

matemàtica pura, el quaternió és una entitat de gran bellesa, però a Heaviside no li fou útil com a eina per a representar les entitats electromagnètiques i, per això, i inspirant-se en la teoria quaterniònica, elaborà un càlcul vectorial (que és el que avui dia trobem als llibres d'electricitat i magnetisme).[10]

La versió vectorial del *Treatise* de Maxwell es deu a Heaviside i, una vegada més, Heaviside se serveix de la matemàtica com a eina essencial, però no se serveix pas precisament dels quaternions de Hamilton, eina construïda dins la matemàtica pura.

Les «eines» matemàtiques que han estat essencials en el desenvolupament de la ciència i la tecnologia no solen ser, en la seva gènesi, resultats de teories elaborades en el si de la matemàtica pura, sinó que són aquelles que, amb rigor o sense, s'han anat construint al costat del problema científic o tecnològic a resoldre.

Més endavant s'han pogut elaborar teories abstractes de matemàtica pura que ho engloben tot, i a vegades els científics i els enginyers s'han servit d'aquestes teories, però d'altres vegades, quan la formulació abstracta amaga la gènesi del concepte, la teoria pura sol representar per l'enginyer i el científic una base de legalitat que li permet continuar treballant amb les eines genuïnes —tal vegada poc rigoroses— però que són més properes als objectes que tracta. Un exemple il·lustratiu el trobem amb la δ de Dirac.[2] Avui dia, els textos bàsics de l'enginyeria i de la física es continuen definint a la manera de Dirac, tot i que és una definició matemàticament impossible i que Schwartz en va donar una de rigorosa el 1945. Schwartz defineix una *distribució* com un funcional lineal i continu sobre l'espai vectorial Ω de les funcions reals infinitament derivables i de suport compacte, i llavors la δ de Dirac s'identifica amb una distribució, aquella que a cada funció φ de Ω li assigna el seu valor a l'origen.

La funció H de Heaviside també es pot interpretar com una distribució, és aquella $\tilde{H}$ que per cada φ de Ω, $\tilde{H}\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} H\varphi$ i llavors, Schwartz, definint de manera formal un nou concepte de derivació per a les distribucions, acaba demostrant que la derivada de H pensada com a distribució és la distribució δ.[11]

D'aquesta manera, Schwartz ha aconseguit rigoritzar la definició de Dirac (o de Heaviside). Ara però, amb aquesta rigorització s'ha perdut el seu significat físic i es fa difícil d'interpretar la δ de Schwartz com una eina matemàtica útil per a la resolució de problemes mecànics o elèctrics que tractin amb forces o tensions de gran magnitud que actuen durant un temps molt curt.

10. Podeu trobar una elegant exposició de tot aquest procés que va dels quaternions als vectors a M. DONCEL, 1984, *Orígens físics de l'anàlisi vectorial*, conferència que forma part del cicle «El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX», Barcelona, Institut d'Estudis Catalans, «Arxius de la secció de Ciències», LXXV.

11. Si T és una distribució, la seva derivada T' és la distribució que a cada funció φ de Ω li fa correspondre $-T\varphi'$. Llavors:

$$\tilde{H}'\varphi = -\tilde{H}\varphi' = -\int_{-\infty}^{+\infty} H\varphi' = -\int_{0}^{\infty} \varphi' = \varphi(0) = \delta\varphi$$

Per tant, $\tilde{H}' = \delta$.

Bibliografia

BROMWICH, T. J. (1916), «Normal Coordinates in Dynamical Systems», *Proc. London Math. Soc.*, *15*, p. 401-448.

COOPER, J. L. B. (1952), «Heaviside and the operational calculus», *Mathematical Gazette*, *36*, p. 5-19.

GILLESPIE, C.C. (1981), *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, Nova York.

HEAVISIDE, O. (1970), *Electrical Papers*, Chelsea Publishing Company, Nova York.

HEAVISIDE, O. (1971), *Electromagnetic Theory* (EMT), Chelsea Publishing Company, Nova York.

LÜTZEN, J. (1979), «Heaviside's operational calculus and the attempts to rigorise it», *Archive for History of Exact Sciences*, *21*, 2, p. 161-200.

MARCH, H. W. (1927), «The Heaviside Operational Calculus», *Bull. Amer. Soc.*, *33*, p. 311-318.

POL, Van der, (1929), «A simple Proof and an Extension of Heaviside's Operational Calculus», *Phil. Mag.*, *7*, p. 1153-1162.

SCHWARTZ, L. (1969), *Métodos matemáticos para las ciencias físicas*, Madrid, Selecciones científicas.